Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Enero-Abril 2009

Nombre: ____________________

Carnet: ______________ Sección: ______

MA-3111—Primer Parcial, modelo 28-2-2009, 35 %— 9:30 a.m.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE; $a \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$u(x)$	$U(z)$
$\alpha u(x) + \beta v(x)$	$\alpha U(z) + \beta V(z)$
$u'_{gen}(x)$	$zU(z)$
$u^{(k)}_{gen}(x)$	$z^k U(z)$
$xu(x)$	$-U'(z)$
$u(x-a)$	$U(z)e^{-az}$
$e^{\alpha x}u(x)$	$U(z-\alpha)$
$u * v(x)$	$U(z)V(z)$

$\longrightarrow$

$u(x)$	$U(z)$
$\delta(x)$	1
$\delta^{(k)}(x)$	z^k
$\delta^{(k)}(x-a)$	$z^k e^{-az}$
$H(x)$	$\frac{1}{z}$
$H(x)e^{\alpha x}$	$\frac{1}{z-\alpha}$
$H(x)\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{z^k}$

$\longrightarrow$

$u(x)$	$U(z)$
$H(x)e^{\alpha x}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{(z-\alpha)^k}$
$H(x)\operatorname{sen}(ax)$	$\frac{a}{z^2+a^2}$
$H(x)\cos(ax)$	$\frac{z}{z^2+a^2}$
$H(x)\operatorname{senh}(ax)$	$\frac{a}{z^2-a^2}$
$H(x)\cosh(ax)$	$\frac{z}{z^2-a^2}$

---

1. Demuestra que el producto de convolución entre tres funciones causales es asociativo

$$((f * g) * h)(x) = (f * (g * h))(x)$$

Solución

2. Sea $f(x)$ una función de onda triangular causal, es decir una función que enntre $(0, 2T)$ viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{T} & \text{si} x \in (0, T) \\ 1 - \frac{x}{T} & \text{si} x \in (T, 2T) \end{cases}$$

$$f(x) = 0 \quad \forall x < 0$$

$$f(x + 2T) = f(x) \quad \forall x > 0$$

a) Grafica la función entre $(-T, 5T)$

b) Calcula su transformada de Laplace

Solución

$$\frac{1}{Tz^2} \operatorname{tgh}\left(\frac{Tz}{2}\right)$$

3. Sea $Q(z)$ un polinomio de grado n con n raíces diferentes z_i con $i = 1, .., n$ y $P(z)$ un polinomio de grado menor que n. Encuentra la transformada inversa de Lapalace de $\frac{P(z)}{Q(z)}$ en función de los valores de $P(z_k)$ y $Q'(z_k)$

   Solución

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right) = H(x)\sum_{k=1}^{n} \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} e^{z_k}$$

4. Sea la función $f(x) = \frac{\alpha \operatorname{sen} x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}$ con $|\alpha| < 1$
   a) Grafique la función en $(0, 2\pi)$ para $\alpha = 0{,}5$
   b) Calcule los coeficientes a_n y b_n de la serie de Fourier de $f(x)$

   $a_n =$

   $b_n =$

   c) Estudiando la convergencia de la serie en $x = 1/2$ halle la suma de la serie

   $\alpha - \alpha^3 + \alpha^5 - \alpha^7 + ... =$

   Solución

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \operatorname{sen}(nx)$$